

**Aufgabe 9.1** Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Widerlegen Sie die falsche Aussagen, indem Sie jeweils ein Gegenbeispiel angeben.

- a) Der Binomialkoeffizient  $\binom{10}{k}$  ist für alle ganzen Zahlen  $0 \leq k \leq 10$  durch 5 teilbar.
- b) Für alle  $x \in \mathbb{R}$  ist  $x^2$  positiv.
- c)  $\ln|x| > 0$  für alle  $x \neq 0$ .
- d) Alle Zahlen der Form  $2^n - 1$  für  $n \in \mathbb{N}$  sind prim.

e#) Alle Folgenglieder der durch die Rekursion

$$p_{n+3} = p_{n+2} + p_{n+1} - p_n, \quad p_1 = 5, p_2 = 7, p_3 = 11$$

definierten Folge sind Primzahlen.

**Aufgabe 9.2** Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit Induktion:

- a)  $n^3 + 2n$  ist für alle  $n \in \mathbb{N}$  durch 3 teilbar.
- b)  $\sum_{m=2}^n \frac{1}{(m-1)m} = 1 - \frac{1}{n}$ .
- c)  $n^2 \geq 2n + 2$  für alle  $n \geq 3$ .
- d)  $n^2 - 1$  ist für alle ungerade  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ , durch 8 teilbar.

**Aufgabe 9.3** Betrachten Sie die Summen

$$1, \quad 1 + 3, \quad 1 + 3 + 5, \quad 1 + 3 + 5 + 7, \quad \dots$$

Wie kann man diese Summen (zeichnerich) veranschaulichen? Welchen Wert kann man für die  $n$ -te Summe vermuten? Beweisen Sie Ihre Vermutung mit Induktion.

**Aufgabe 9.4** Ergänzen Sie das Pascalsche Dreieck bis  $n = 10$ .

**Aufgabe 9.5** Berechnen Sie:  $\binom{7}{1}$ ,  $\binom{12}{0}$ ,  $\binom{12}{7}$ ,  $\binom{13}{5}$ ,  $\binom{50}{48}$ ,  $\binom{28}{4}$ .

**Aufgabe 9.6**

- a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 5 weißen und 4 schwarzen Kugel in eine Reihe so zu legen, dass 2 schwarze Kugel nie nebeneinander liegen? Unterscheiden Sie die Fälle: (i) die Kugel einer Farbe sind ununterscheidbar, (ii) alle Kugel sind unterscheidbar.
- b) Wie viele 6-stellige Zahlen gibt es, die nur aus ungeraden Ziffern (1, 3, 5, 7, 9) bestehen?
- c) Wie viele Teiler hat die Zahl 462?
- d) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 8 Türme auf einem Schachbrett so zu platzieren, dass sich nicht schlagen und nur auf den schwarzen Feldern stehen?